Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör **2022/2023. 2. feladatsor**
5.-6. évfolyam

MŰVELETEK TERMÉSZETES SZÁMOKKAL

A természetes számokkal végzett műveletek és azok tulajdonságai nagy jelentőséggel bírnak a különböző matematikai problémák megoldásában. A négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) közül kettő (összeadás és szorzás) rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a művelet nem vezet ki a természetes számok halmazából, azaz bármely két természetes szám esetében a művelet eredménye is természetes szám lesz. Ez nem igaz a kivonás, illetve az osztás esetében. Például létezik két olyan szám, amelynek osztása során a maradék nullától különböző, vagyis a hányados nem természetes szám. Az olyan számpárok esetében, ahol az egyiket a másikkal osztva a maradék nulla, beszélhetünk arról, hogy egyik szám osztója a másiknak (illetve a második szám többszöröse az elsőnek). A természetes számok esetében további érdekességet jelentenek az olyan műveleti tulajdonságok, mint például a kommutativitás, asszociativitás, illetve disztributivitás. Továbbá kiemelt fontosságú a természetes számokkal végzett műveletek sorrendje, ahol a négy alapművelet és a zárójelek elhelyezése határozza meg a műveletsor helyes eredményét.

Mintapéldák

1.) András először összeadta azokat a 100-nál kisebb pozitív egész számokat, amelyekben nem szerepel az 1-es számjegy. Azután azokat a 100-nál kisebb pozitív egész számokat adta össze, amelyekben nem szerepel a 2-es számjegy. Mennyi az így kapott két összeg különbsége?

Megoldás:

Az első összeg meghatározásához először kiszámítjuk a 100-nál kisebb pozitív egész számok összegét, majd ebből kivonjuk azoknak a számoknak az összegét, amelyekben szerepel az 1-es számjegy. A száznál kisebb pozitív egész számok összegének kiszámításához ezeket párokba rendezzük a következőképpen $1+99$, $2+98$, $3+97$, és így tovább. Belátható, hogy 49 ilyen számpár van, amelyekben minden számpár esetében az összeg 100-zal egyenlő és még marad egy szám az 50. Tehát a 100-nál kisebb pozitív egész számok összege $49 \cdot 100 + 50 = 4950$. A 100-nál kisebb pozitív egész számok felírásakor az 1-es számjegy az 1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 és 91 számokban szerepel, ezek összege 594. Tehát az András által leírt első összeg $4950 - 594 = \mathbf{4356}$.
A 2-es számjegy a 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 42, 52, 62, 72, 82 és 92 számokban szerepel, ezek összege 693. Tehát az András által kiszámolt második összeg $4950 - 693 = \mathbf{4257}$. Ebből következik, hogy a két összeg különbsége: $4356 - 4257 = \mathbf{99}$.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

2.) Béla lejegyezte a 3-mal osztható 200-nál kisebb pozitív számokat. Kihagyta viszont azokat a számokat, amelyek 9-cel is oszthatók és kétszer írta le azokat, amelyek 15-tel is oszthatók, de 9-cel nem. Mennyi a Béla által leírt számok összege?

Megoldás:

A hárommal osztható pozitív számok 3, 6, 9 és így tovább. Megfigyelhető, hogy a számok hármasával követik egymást, ezért 66 olyan szám van, amely 200-nál kisebb és 3-mal osztható, ezek közül a legnagyobb a $3 \cdot 66 = 198$. Ezek összegét könnyen kiszámíthatjuk, ha észrevesszük, hogy a számokat kettesével párokba rendezhetjük a következőképpen $3 + 198$, $6 + 195$, $9 + 192$ és így tovább. Könnyen belátható, hogy minden ilyen számpár összege 201, és 33 ilyen számpárt találunk. Tehát a 3-mal osztható 200-nál kisebb pozitív egész számok összege $33 \cdot 201 = \mathbf{6633}$. Ebből ki kell vonni a 200-nál kisebb 9-cel osztható pozitív számok összegét. Ilyen számokból 22 darabot találunk, az utolsó a $22 \cdot 9 = 198$. Ezeket is párokba rendezhetjük, mégpedig $9 + 198$, $18 + 189$, $27 + 180$, és így tovább. Minden ilyen számpár összege 207, és 11 ilyen számpár van. Így a 9-cel osztható 200-nál kisebb pozitív egész számok összege $11 \cdot 207 = \mathbf{2277}$. Mivel a 15-tel osztható számokat kétszer írta le, ezért az eredeti összeghez még egyszer hozzá kell adni a 15-tel osztható számok összegét. Ezek a számok 15, 30, 60, 75, 105, 120, 150, 165, 195, az összegük pedig 915. Tehát a Béla által lejegyzett számok összege $6633 - 2277 + 915 = \mathbf{5271}$.

3.) Néhány egymást követő természetes szám összege 45. Melyek lehetnek ezek az egész számok?

Megoldás:

Ha az összegben páratlan darab szám szerepel, akkor a következőképpen járunk el. Kezdetben tekintsük azt az esetet, amikor három szám összegéről van szó. A középső szám $45: 3 = 15$, míg a két szomszédja 14 és 16. Könnyen belátható, hogy a számszomszédokat az 1-es szám kivonásával, illetve hozzáadásával kaptuk meg így az összeg $\mathbf{14} + \mathbf{15} + \mathbf{16} = 45$ maradt. Hasonlóan eljárva öt szám esetében a középső $45: 5 = 9$, az öt szám pedig **7, 8, 9, 10 és 11**. Hét szám esetében a középső $45: 7$ nem egész szám, így a hét szám esete nem áll fenn. Kilenc szám esetében a középsőre öt, míg a számokra **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9** adódik.
Ha az összegben páros darab szám szerepel, akkor egy más eljárást alkalmazunk. Először vegyük a két szám esetét. Elvégezve a $45: 2 = 22{,}5$ osztást, majd a kapott hányadost 0,5-tel emelve, illetve csökkentve megkapjuk a két számot, amelyek a **22 és a 23**. Négy szám esetében $45: 4 = 11{,}25$. Tehát itt nem alkalmazhatjuk az említett eljárást, nem létezik négy egymást követő természetes szám, amelynek összege 45. Hat szám esetében $45: 6 = 7{,}5$. Itt a kapott hányadost 0,5-tel, 1,5-tel, illetve 2,5-tel növeljük, majd csökkentjük, így kapjuk meg az **5, 6, 7, 8, 9, 10** számokat. Nyolc szám esetében $45: 8 = 5{,}625$. Ebből következik, hogy a 45 nem állítható elő nyolc egymást követő természetes szám összegeként. Tíz szám esetében $45: 10 = 4{,}5$ és alkalmazva az előbbi eljárást a tíz darab egymást követő természetes számra **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9** adódik. Belátható, hogy több szám esetében az eljárást folytatva negatív egész számok is megjelennek, tehát más eset nem lehetséges.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

4.) Csaba növekvő sorendben elkezdte lejegyezni azokat a pozitív egész számokat, amelyek 3-mal vagy 5-tel oszthatók (esetleg mindkét számmal is). Bizonyos idő után ezt abbahagyta, majd az addig leírt számokat összeszorozta. Hány darab számot írhatott le, ha a kapott szorzat 6 darab nullára végződik?

Megoldás:

Kezdjük felsorolni a 3-mal vagy 5-tel osztható számokat:
3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 27, 30, ……
A fő kérdés az, hogy hány számot kell összeszorozni ahhoz, hogy a kapott szorzat 6 darab nullára végződjön? Belátható, hogy egy szorzat végén csak akkor jelenik meg a nulla számjegy, ha 5 valamely többszörösét egy páros számmal szorozzuk. Például $5 \cdot 4 = 30$, vagy $15 \cdot 6 = 90$ és így tovább. Továbbá az olyan szám, amelyek páros és 5-nek is többszöröse a végső szorzat végén eggyel növeli a nullák számát mivel 10-nek is többszöröse (ilyenek például a 10, 20, 30, stb.). Tehát, ha azt akarjuk, hogy a szorzat végén 6 darab nulla álljon, akkor ebben a szorzatban pontosan 6 darab olyan szám kell, hogy álljon, amely 5-nek a többszöröse és legalább 6 darab páros szám. Viszont, mivel a 25-ben két 5-ös szorzótényező is van, ezért ő lehet az utolsó 5-tel osztható szám. (A párosokból is elég kevesebb, hiszen pl. a 4 többszörösei legalább 2 db 2-es szorzótényezőt tartalmaznak.) Ebből kiindulva *legalább* a következő számokat kell összeszorozni:
3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25.
Viszont a szorzat akkor is 6 darab nullára végződik, ha a fenti számokhoz még a 27-et is hozzátesszük, vagyis a következő számokat szorozzuk össze:
3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 27.
A fentiekből következik, hogy **Csaba *legalább* 12 és *legfeljebb* 13 számot szorzott össze**.

Gyakorló feladatok

1.) Írjunk műveleti jeleket, illetve zárójeleket az alábbi számok közé:

1 2 3 4 5 =

A műveletek elvégzése után hányféle különböző eredményt kaphatunk?

2.) Két szám különbsége 1659. Ha az egyik számot a másikkal elosztjuk, akkor a hányados 6, a maradék 89. Melyik ez a két szám?

3.) Dénes gondolt öt egész számot, amelyek közül minden lehetséges módon kiválasztott két-két számot és kiszámította az összegüket. Ezek az összegek: 3, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 25. Melyik számokra gondolt Dénes?

4.) Egy négyjegyű pozitív egész számból kivontuk a számjegyeinek az összegét, és az így kapott négyjegyű szám számjegyeit összekevertük. A keverés után a kapott számba valahová beírtunk egy ötödik számjegyet. Az így kapott szám: 23456. Melyik volt a beírt ötödik számjegy?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) Írjunk műveleti jeleket, illetve zárójeleket a számok közé úgy, hogy a lehető legkisebb pozitív egész számot kapjuk:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 =

2.) Az 1000-nél kisebb természetes számok között hány olyan van, amelynek a 4-gyel, 5-tel és 6-tal való osztási maradéka 3?

3.) Hány olyan legfeljebb négyjegyű pozitív egész szám van, amely 15-tel osztható és a számjegyeinek összege 15?

4.) Bontsuk fel a 140-et két összeadandóra úgy, hogy ha az első összeadandót 8-cal osztjuk, akkor a hányados ugyanaz, mint mikor a második összeadandót osztjuk 12-vel.

Beküldési határidő: **2022.12.19.**
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2021/2022. 2. feladatsor***
7.-8. évfolyam

MATEMATIKAI JÁTÉKOK

A játékelmélet alapjait Neumann János fektette le egy 1928-as munkájában, majd az Oskar Morgenstern neoklasszikus matematikus-közgazdásszal közösen írt „Játékelmélet és gazdasági viselkedés” című (*The Theory of Games and Economic Behavior,* 1944) művében. A matematika, a közgazdaságtan, a szociológia, a pszichológia, a biológia és a számítástechnika a játékelmélet által legérintettebb tudományok. A mesterségesintelligencia-kutatás is felhasználja eredményeit. 1994-ben Harsányi János magyar származású közgazdász, másokkal megosztva közgazdasági Nobel-emlékdíjat kapott játékelméleti kutatásaiért. Mi itt kétszemélyes stratégiai játékokkal próbálunk kedvet teremteni általános iskolásoknak a témához, nyerési esélyek latolgatásához, kidolgozásához. Sok sikert a feladatok megoldásához!

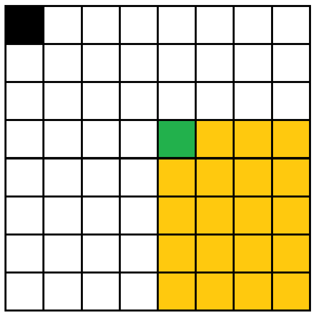
Mintapéldák

1.) Négyzet alakban leraktunk az asztalra 5x5 kavicsot. Két játékos felváltva vesz belőlük egy darabot vagy két oldalszomszédosat. Az győz, aki utolsóként vesz. A kezdő nyerhet. Hogyan?

Megoldás:

A kezdő játékos első lépésében elveszi a középen lévő kavicsot, majd ezután mindig ellenfele lépésének a középpontra tükrösen megfelelő kavicso(ka)t veszi el.

2.) (Mérgezett csoki) Van egy 8x8-as csokitáblánk, melynek bal felső szelete mérgezett. Két játékos felváltva tör a táblából úgy, hogy valamelyik mezőt kiválasztja, s az összes tőle jobbra és lefelé eső szeletet letöri. (Pl. az ábrán kiválasztott zöld mező kiválasztásával a színezett mezők lesznek letörve.) Az veszít, aki kénytelen a mérgezett szeletet elvenni. Mutassuk meg, hogy a kezdő megnyerheti a játékot!



Megoldás:

A kezdő elveszi a tábla jobb alsó 7x7-es szeletét, majd mindig annyi szeletet vesz el mint az ellenfele úgy, hogy ha a másik játékos az oszlopból vesz, akkor ő a sorból, illetve fordítva.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

3.) Az asztalon 28 db gyufaszál van, s ketten felváltva vesznek 1, 2 vagy 3 szálat. Az a játékos nyer, aki utolsóként vesz. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

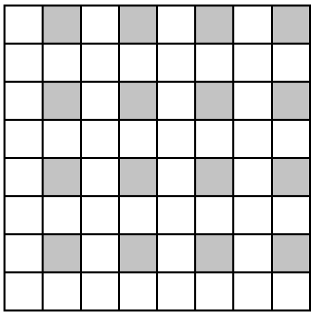
Megoldás:

Gondolkodjunk „visszafelé”(rákmódszer), keressük meg a nyerő helyeket! Aki 4 szál gyufát hagy az asztalon, az nyer, hiszen ellenfele mind a négyet nem tudja elvenni, de az ellenfél lépése után ő a maradékot el tudja venni, ezzel megnyeri a játékot. 4 szálat úgy tud meghagyni, ha előzőleg 8 szálat hagyott az asztalon, s így visszafele a nyerő helyek 12, 16, 20, 24.
A „másodhúzó” játékos tud nyerni. Az ellenfél választását mindig 4-re egészíti ki, s ily módon hagy rendre 24, 20, 16, 12, 8, 4 majd 0 szál gyufát az asztalon.

4.) Egy 8x8-as sakktábla bal alsó sarkából indul egy bábu. Két játékos felváltva tolja egy-egy mezővel jobbra, felfelé vagy jobbra átlósan felfelé. Az nyer, aki a jobb felső mezőre lép. A kezdő játékos nyerhet. Hogyan?

Megoldás:

Keressük a nyerő helyeket! Ilyen hely természetesen a jobb felső sarok. Könnyű látni, hogy a felső sorban és a jobb szélső oszlopban a jelölt mezők nyerő helyek: aki ide lépett, az ezután csak ilyen mezőre tud lépni, s megnyeri a játékot. Sorra felderíthető, hogy melyik mező „jó”, melyik „rossz”. Az ábrán a vonalkázott mezők a nyerő helyek. A kezdő az első lépésében jobbra átlósan lép, majd mindig megismétli ellenfele lépését, s így a nyerő mezőkön lépkedve győzni fog.



Gyakorló feladatok

1.) Ketten felváltva mondanak egy-egy számot, amelyik az 1, 2 vagy a 3 valamelyike lehet. Kiszámolják az elhangzott számok összegét, és akinél ez az összeg eléri a 21-et, az nyer. A kezdő játékos győzhet. Hogyan kell játszania?

2.) Az asztalon 40 db gyufaszál van, s ketten felváltva vesznek 2, 3, 4 vagy 5 szálat. Az a játékos nyer, aki utolsóként vesz. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

3.) Két kupac kavicsunk van. Az egyikben 60, a másikban 70 kavics van. Két játékos felváltva vesz valamelyik kupacból legalább egy kavicsot, de abból akár az összeset is elveheti. Az győz, aki utolsóként vesz. A kezdő nyerhet. Hogyan?

4.) Van egy 2x8-as csokitáblánk, melynek bal felső szelete mérgezett. Két játékos felváltva tör a táblából úgy, hogy valamelyik mezőt kiválasztja, s az összes tőle jobbra és lefelé eső szeletet letöri. Az veszít, aki kénytelen a mérgezett szeletet elvenni. Mutassuk meg, hogy a kezdő megnyerheti a játékot!

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

<u>**Kitűzött feladatok**</u>

1.) Egy 8x8-as sakktábla bal alsó sarkából indul egy bábu. Két játékos felváltva lépteti vagy vízszintesen jobbra néhány mezőt, vagy felfelé valamennyi mezőt. Az a játékos nyer, aki a jobb felső sarokba lép. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

2.) Az asztalon 40 db gyufaszál van, s ketten felváltva vesznek 2, 3, 4 vagy 5 szálat. Az a játékos veszít, aki utolsóként vesz. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

3.) Egy dobozban 103 darab kavics van. Péter és Pál felváltva vesznek ki a dobozból legalább egy, de legfeljebb 10 kavicsot. Amikor a doboz kiürült, mindketten megszámolják, hogy összesen hány kavicsot vettek ki külön-külön. Ha ez a két szám relatív prím, akkor Péter nyert. A játékot kezdő Péter tud-e úgy játszani, hogy biztosan ő nyerjen?

4.) Ketten a következő játékot játsszák. A 4, 5, 6, 7, 8 számok közül felváltva mondanak egy-egy tetszés szerint választott számot, s mindig kiszámolják az addig mondott számok szorzatát. A játékot az nyeri, akinél ez a szorzat túllépi a 2000-et. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Beküldési határidő: **2022.12.19.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre