Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001: 2000

Levelező Matematika Szakkör **2022/2023.**

DÖNTŐ

5. OSZTÁLY

1) Takarmánykeveréket készítünk búzából és kukoricából. Egy kg búza ára 10 tallér, egy kg kukorica ára pedig 6 tallér. Hány kg kukoricát kell összekeverni 48 kg búzával ahhoz, hogy egy kg keverék ára 7 tallér legyen?

   Megoldás:

   Belátható, hogy a takarmánykeverék és búza árának különbsége 3, ez háromszorosa a kukorica, illetve a takarmánykeverék ára közötti különbségnek. Tehát a keverék előállítása során kukoricából háromszor annyit használunk fel, mint búzából. **Így a felhasznált kukorica mennyisége $\mathbf{48 \cdot 3 = 144}$ kg.**

2) A 2010 egy olyan szám, amelyben a számjegyek összege 3. Hány olyan természetes szám van 100 és 2023 között, amelyben a számjegyek összege 3?

   Megoldás:

   Az adott tulajdonsággal rendelkező háromjegyű számok 102, 111, 120, 201, 210, 300. A négyjegyű számok pedig 1002, 1011, 1020, 1101, 1110, 1200, 2001, 2010. **Tehát összesen 14 természetes szám van az adott tulajdonságokkal.**

3) Egy téglalap hosszúsága 24 cm, szélessége pedig 15 cm. A téglalap szélességét 5 cm-rel, míg a hosszúságát valamennyivel növeltük. Így a keletkezett téglalap területe 840 cm^2 lett. Hány cm-rel növeltük a téglalap hosszúságát?

   Megoldás:

   A keletkezett téglalap két téglalapra bontható. Az elsőnek az oldalai 24 cm és 20 cm, így területe 480 cm^2. A másodiknak egyik oldala 20 cm, a másik oldala pedig azzal a mennyiséggel egyenlő, amennyivel a téglalap hosszúságát növeltük. A második téglalap területét megkapjuk, ha a nagy téglalap területéből kivonjuk az első téglalap területét, tehát a keresett terület $840 - 480 = 360$ cm^2. **Tehát a téglalap hosszúságát $\mathbf{360 : 20 = 18}$ cm-rel növeltük.**

4) Egy 6 fős baráti társaságban az egyik héten minden egyén pontosan egyszer találkozott minden egyes barátjával. Az ilyen találkozásokon fagylaltozásra került sor. A fagylaltozásokon alkalmanként 5 vagy 6 eurót fizettek, így összesen 84 eurót költöttek el. Hány olyan fagylaltozás volt, ahol 5 eurót költöttek?

<u>*Megoldás:*</u>

A 6 fős baráti társaságban $6 \cdot 5 : 2 = 15$ találkozásra került sor. Ha minden esetben 5 eurót költenek, akkor a teljes költség $15 \cdot 5 = 75$ euró lett volna. Viszont valójában 84 eurót költöttek, ez azt jelenti, hogy $84 - 75 = 9$ alkalommal a fagylaltozás 6 euróba került, és $15 - 9 =$ **6 alkalommal pedig 5 euróba.**

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2022/2023.**

DÖNTŐ

6. OSZTÁLY

1) Béla egy könyvet olvas. Ha naponta 20 oldalt olvasna el, akkor a könyvet 4 nappal később olvasná ki, mintha naponta 30 oldalt olvasna. Hány oldalas a könyv?

   Megoldás:

   Ha naponta 20 oldalt olvas, akkor az utolsó négy napra $20 \cdot 4 = 80$ oldal marad. Ha naponta 30 oldalt olvas, akkor az első esethez képest napi 10 oldallal többet olvas el. Így a számított 80 oldal felesleg $80 : 10 = 8$ napi „többletolvasáshoz” elegendő. Tehát a könyvet 8 nap alatt olvassa ki akkor, ha naponta 30 oldalt olvas, illetve 12 nap alatt, ha naponta 20 oldalt olvas. **Mindkét esetben számolva 240 oldalas a könyv.**

2) Három szám összege 100. Ha mindhárom számból ugyanazt a számot vonjuk ki, akkor 7-et, 13-at és 32-t kapunk. Melyik az eredeti három szám?

   Megoldás:

   Ha mindhárom számból ugyanazt a számot kivonjuk, akkor a három szám összege $7 + 13 + 32 = 52$ lesz, vagyis $100 - 52 = 48$ -cal kevesebb, mint kezdetben. Tehát a kivont szám háromszorosa 48, így ez a szám $48 : 3 = 16$. **Következik, hogy az eredeti három szám $\mathbf{13 + 16 = 29}$, $\mathbf{7 + 16 = 23}$, illetve $\mathbf{32 + 16 = 48}$.**

3) Egy négyzet egy csúcsból induló két oldalának hosszát 12 cm-rel, illetve 8 cm-rel hosszabbítottuk meg. Az így keletkezett téglalap területe 436 cm^2–rel nagyobb az eredeti négyzet területénél. Határozzuk meg az eredeti négyzet egy oldalának a hosszát!

   Megoldás:

   A 436 cm^2 három téglalap területének az összegével egyenlő. Az első téglalap területének mérőszáma a négyzet oldalának a 12-szeresével, a második téglalap területének mérőszáma a négyzet oldalának a 8-szorosával, míg a harmadik téglalap területe $8 \cdot 12 = 96$ cm^2-rel egyenlő. Így a négyzet oldalának a 20-szorosa $436 - 96 = 340$-nel egyenlő. **Tehát a négyzet egy oldala $\mathbf{340 : 20 = 17}$ cm.**

4) Egy teniszbajnokságon 8 résztvevő van és minden versenyző mindenkivel egy mérkőzést játszik. Az eddig lejátszott mérkőzések alapján a következőket tudjuk: 3 résztvevő fejenként 5 mérkőzést, 2 résztvevő fejenként 4 mérkőzést, illetve 3 részvevő fejenként 3 mérkőzést játszott. Hány mérkőzés van még hátra?

Megoldás:

Az eddig lejátszott mérkőzések száma $(3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3) : 2 = 16$. A teniszbajnokságon összesen $8 \cdot 7 : 2 = 28$ mérkőzésre kerül sor. **Tehát még $\mathbf{28 - 16 = 12}$ mérkőzés van hátra.**

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2022/2023.**

DÖNTŐ

7. OSZTÁLY

1) Hány olyan szám van az első 2023 pozitív egész között, amelyik a 2, 3, 5 számok közül legfeljebb kettővel osztható?

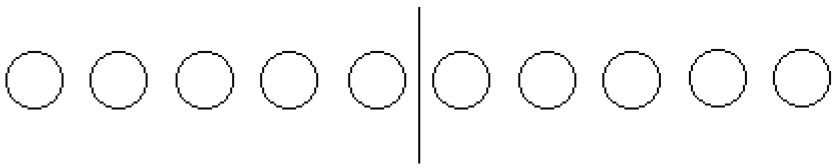
   Megoldás:

   Azok a számok lesznek rosszak, amelyek a három szám legkisebb közös többszörösével, azaz 30-cal oszthatók. Mivel $2023:30 \approx 67{,}4$, ezért 67 db ilyen számunk van. **Így $\mathbf{2023-67=1956}$ ilyen szám van.**

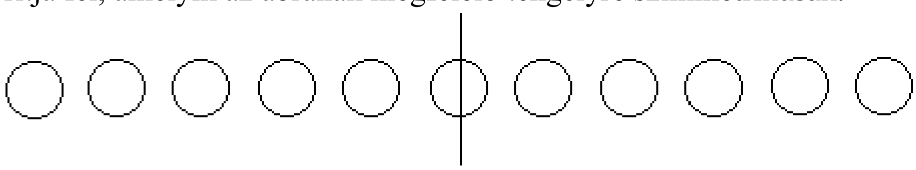
2) Sorban egymás mellé kuglibábukat állítottunk. Két játékos felváltva felborít egy bábut, vagy két szomszédos bábut. Az nyer, aki az utolsót felborítja. Ki nyerhet, ha:
   a) 10 kuglibábut állítunk fel?
   b) 11 kuglibábit állítunk fel?

   Megoldás:

   Mind a két játéknál a kezdőnek van nyerő stratégiája, hiszen ő tud szimmetrikus helyzetet kialakítani és az utolsó bábu felborításával is szimmetrikus helyzet alakul ki.
   a) esetben a középső kettő felborításával kezdi, majd az ellenfél lépése után azt, vagy azokat a bábukat borítja fel, amelyik az ábrának megfelelő tengelyre szimmetrikusak.



   b) esetben a középső felborításával kezdi, majd az ellenfél lépése után azt, vagy azokat a bábukat borítja fel, amelyik az ábrának megfelelő tengelyre szimmetrikusak.



3) Gabi életkora 20 évvel ezelőtt hatodrésze volt édesapja akkori életkorának. Most Gabi feleannyi idős, mint az édesapja. Hány éves most Gabi édesapja?

Megoldás:

Jelöljük Gabi életkorát *x*-szel. Ekkor felírhatjuk a következő egyenletet:

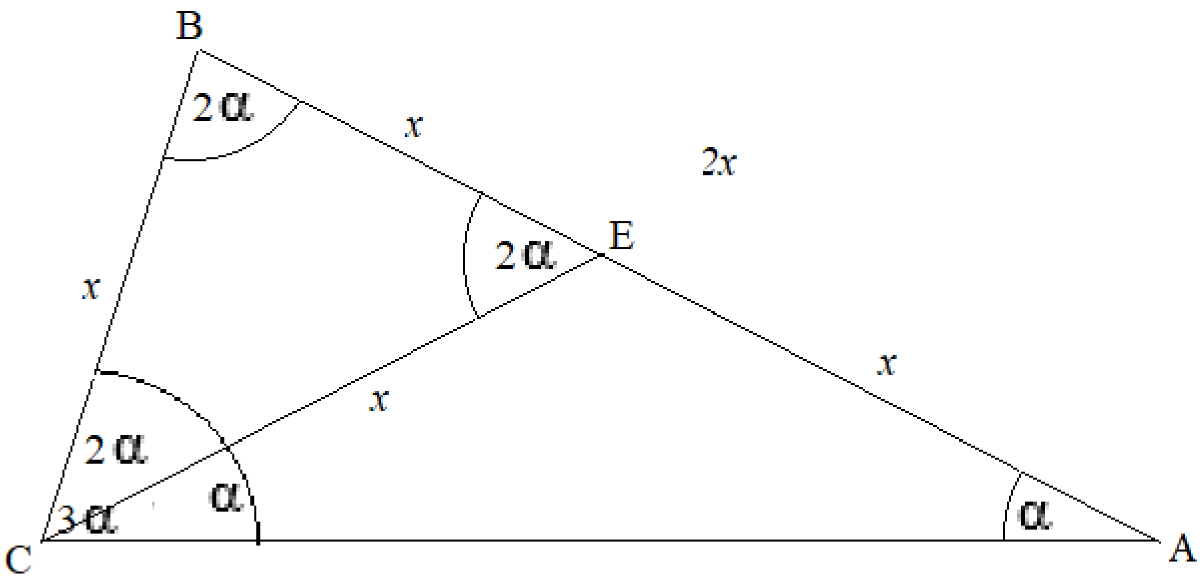
$$2x - 20 = 6(x - 20)$$

Ennek megoldása pedig: **x** = 25, **így az apa életkora 50 év.**

4) Egy háromszög legnagyobb oldalának hossza kétszerese a legkisebb oldal hosszának, és a legnagyobb szöge pedig háromszor akkora, mint a legkisebb szög. Hány fokosak a háromszög szögei?

Megoldás:

Az ABC háromszög A, ill. C csúcsnál lévő szögét, ill. az ezekkel szemközti oldalakat ismerjük. ACE ∡legyen α. Ekkor ACE háromszög E csúcsánál lévő külső szöge 2α. Így BCE háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, így szárai is egyenlők, tehát BE = *x*. Ekkor viszont AE is *x*-szel egyenlő, így mivel AEC egyenlőszárú, EC = *x*.
Tehát AEB szabályos, így B∡ = 2α
A háromszög három szögének összege $6\alpha = 180^0$, ahonnan $\alpha = 30^0$.
Így a szögek: $\mathbf{30^0}$; $\mathbf{60^0}$; $\mathbf{90^0}$.



Levelező Matematika Szakkör **2022/2023.**

DÖNTŐ

8. OSZTÁLY

1) Hány olyan háromjegyű szám van, melyben a számjegyek vagy csökkenő, vagy növekvő sorrendben követik egymást?

Megoldás:

Először a 10 számjegyből kiválasztunk hármat úgy, hogy figyelünk a sorrendjükre. Így összesen $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ számhármas képezhető. Ezek 6-os csoportokban ugyanazoknak a számjegyeknek az összes lehetséges sorbarendezését tartalmazzák. (Pl. 058; 085; 805; 850; 508; 580.) Minden ilyen csoportból pontosan egy olyan lesz, ahol a számjegyek csökkenő sorrendben követik egymást. Ezért a keresett számok száma: $720 : 6 = 120$.
Ugyanígy bánhatunk el a növekvő sorrenddel is, csak a 0 számjeggyel nem kell számolnunk, így $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ számhármasból $504 : 6 = 84$ számot képezhetünk.
Tehát összesen 120 + 84 = 204 ilyen háromjegyű szám van.

2) Ketten felváltva mondanak egyre nagyobb számokat, de legfeljebb akkorát, mint amennyi az előzőleg elhangzott szám és a szám számjegyeinek az összege. (Ha például az egyikőjük 47-et mond, akkor a másik legfeljebb 47+ (4 + 7) = 58-at mondhat.) A kezdő elsőként 30-at mond. Az nyer, aki kimondja a 60-at. Kinek van nyerő stratégiája?

Megoldás:

Gondolkodjunk visszafelé. Ha keressük azt a számot, akkor visszafelé haladva a 52 lesz az első olyan szám, amelyről az ellenfél nem tud a 60-ra lépni, így ezt nekünk kell kimondanunk. Innen továbbhaladva a olyan számot kell találnunk, ahonnan az ellenfél nem tud az 52-re lépni. Az első ilyen a 43, így ezt is nekünk kell mondani. A következő ilyen szám a 34.
Tehát az fog nyerni, aki ezeket a számokat tudja mondani. Mivel a 30 után a második nem tud 34-et mondani, **így a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.**

3) Egy fán kétszer annyi hangya lakik, mint amennyi pók. Szemeik és lábaik száma összesen 442. (Minden hangyának két szeme és hat lába van. A pókoknak viszont két szeme és 8 lába van.) Hány hangya lakik a fán?

<u>*Megoldás:*</u>

Legyen a pókok száma *x*. Ekkor hangyák száma 2*x*. Felírható a következő egyenlet:

$$10x + 8 \cdot 2x = 442$$

Ennek megoldása pedig: $x = 17$.

Így tehát 34 hangya lakik a fán.

4) Az ABCD téglalap A csúcsából húzott, az AB oldallal 60°-os szöget bezáró egyenes a BC oldal (C-n túli) meghosszabbítását az E pontban metszi. Az EDC szög 30°-os, a BC oldal hossza 4 egység. Milyen hosszú az EB szakasz?

<u>*Megoldás:*</u>

Mivel a téglalap szemben lévő oldalai egyenlők, ezért AD = BC = 4.

ABC háromszög félszabályos, ezért AEB∡ = 30^0.

EDC háromszög félszabályos, ezért DEC∡ = 60^0.

Ebből adódik, hogy DEA∡ = 30^0.

Mivel DAE∡ is 30^0, ezért ADE háromszög egyenlő szárú, így szárai is egyenlők, tehát DE = DA = 4.

Mivel EDC háromszög félszabályos, így CE fel akkora, mint ED, tehát 2 egység.

Tehát EB szakasz 6 egység hosszú.